Matematická analýza II

Stručné výpisky
z materiálů prof. Pultra

Zimní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak, Tomáš Sláma

Revize : Mgr. Karel Král,
Verze 3.0
18. února 2021

Obsah

1 Metrické prostory

1.1 Definice metrického prostoru

Definice (Metrický prostor)**:** Nechť X je množina, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkce t. ž. platí:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

pak (X, d) je metrický prostor.

Příklad: Zde je několik metrických prostorů:

$$(\mathbb{R}, |x - y|),$$
$$(\mathbb{C}, |x - y|),$$
$$(G, d), G \text{ je orientovaný souvislý graf, } d \text{ je délka nejdelší cesty}$$

Pozor: trojúhelníková nerovnost v $(\mathbb{C}, |x - y|)$ není tak triviální jako v $\mathbb{R}$.

Definice (Euklidovský prostor $\mathbb{E}_n$)**:** Definujeme jako metrický prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, kde d:

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Pro nás zvlášť důležitý, známý v podobě vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem $\langle \mathbf{u}|v\rangle$ a normou $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{uu}}$ a vzdáleností $d(\mathbf{u}, v) = ||\mathbf{u} - v||$

Definice (Diskrétní prostor)**:** Definujeme jako (X, d), kde $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$

Definice (Podprostor)**:** Buď (X, d) metrický prostor. Pak (Y, d') je podprostor, kde $Y \subseteq X$ a $\forall x, y \in Y : d'(x, y) = d(x, y)$.

Definice (Spojité zobrazení)**:** $f : (X, d) \to (Y, d')$ je spojité zobrazení, pokud

$$\forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

1.2 Triviality

Definice (Identické zobrazení)**:** $f(x) = x$ je spojité zobrazení

$$(X, d) \to (X, d)$$

Definice (Vložení podprostorů)**:** je spojité zobrazení

$$f_1 : (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \to (X_1, d_1)$$
$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 : f_1(x, y) = x$$
$$f_2 : (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \to (X_2, d_2)$$
$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 : f_2(x, y) = y$$
$$\text{obecně pro } j = 1, ..., n \text{ máme}$$
$$f_j : \prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i) \to (X_j, d_j)$$
$$f_j(x_1, x_2, ..., x_n) = x_j$$

Definice (Konvergence)**:** Posloupnost $(x_n)_n$ v metrickém prostoru (X, d) konverguje k $x \in X$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$$

1.3 Věty o metrických prostorech

Věta (Složení spojitých zobrazení je spojité)**:** *Pokud jsou* $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ *a* $g : (X_2, d_2) \to (X_3, d_3)$ *spojité, pak i*

$$g \circ f : (X_1, d_1) \to (X_3, d_3)$$

je spojité.

Věta (Věta o konvergenci)**:** *Zobrazení* $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ *je spojité právě když pro každou konvergentní* $(x_n)_n$ *v* (X_1, d_1) *posloupnost* $(f(x_n))_n$ *konverguje v* (X_2, d_2) *a platí* $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Buď f spojitá a nechť $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ volme ze spojitosti $\delta > 0$ tak, aby $d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \delta$. Tedy je-li $n \geq n_0$ máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

$\neg \Rightarrow \neg$ Nechť f není spojitá. Potom existují $x \in X_1$ a $\varepsilon_0 > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje x_δ takové, že

$$d_1(x, x_\delta) < \delta \qquad \text{ale} \qquad d_2(f(x), f(x_\delta) \geq \varepsilon_0$$

Položme $x_n = x_{1/n}$. Potom $\lim_n x_n = x$ ale $(f(x_n))_n$ nemůže konvergovat k $f(x)$.

□

1.4 Okolí, množiny, uzávěry

Definice (Okolí)**:** Nechť (X, d) je metrický prostor, $x \in X$, pak

$$\Omega(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Formulaci $\Omega(x, \varepsilon)$ se říká otevřená koule s poloměrem ε okolo x.

Příklad (Použití okolí)**:** "U je okolí x" $\equiv \exists \varepsilon > 0, \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$

Definice (Otevřená množina)**:** $U \subseteq (X, d)$ je otevřená, pokud je okolím *každého* svého bodu.

Definice (Uzavřená množina)**:** $V \subseteq (X, d)$ je uzavřená, pokud $\forall (x_n)_n \subseteq V$ je konvergentní v X a $\lim_n x_n \in V$.

Definice (Vzdálenost od množiny)**:** Nechť (X, d) je metrický prostor, $A \subseteq X, x \in X$, pak vzdálenost bodu x od množiny A je

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

Definice (Uzávěr)**:** $\overline{A} : \{x \mid d(x, A) = 0\}$

1.5 Vzory a obrazy

Pro zbytek sekce nechť $f : X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$.

Definice (Obraz)**:** Obraz podmnožiny $A \subseteq X$ v Y:

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Definice (Vzor)**:** Vzor podmnožiny $B \subseteq Y$ v X:

$$f^{-1}[B] = \{x \mid x \in X : f(x) \in B\}$$

$$X \underset{f^{-1}[-]}{\overset{f[-]}{\rightleftarrows}} Y$$

Pozor, f^{-1} má dva významy:

- inverze $f^{-1} : Y \to X$, nemusí existovat
- část v symbolu $f^{-1}[-]$, má smysl vždy

Tvrzení (Vztahy vzorů a obrazů)**:**

$$f[A] \subseteq B \equiv A \subseteq f^{-1}[B],$$

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B$$
$$f^{-1}[f[A]] \supseteq A$$

Věta (Vlastnosti zobrazení mezi metrickými prostory)**:** *Buďte (X_1, d_1) a (X_2, d_2) metrické prostory a buď zobrazení $f : X_1 \to X_2$. Následující tvrzení jsou potom ekvivalentní:*

1. *f je spojité.*
2. *$\forall x \in X_1$ a $\forall$ okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.*
3. *$\forall$ otevřenou U v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1.*
4. *$\forall$ uzavřenou A v X_2 je vzor $f^{-1}[A]$ uzavřený v X_1.*
5. *$\forall A \subseteq X_1$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$*

1.6 Ekvivalence metrik

Definice (Topologická vlastnost/definice)**:** Vlastnost/definice je topologická, je-li zachována homeomorfismy. Jsou to (mimo jiné):

1. konvergence
2. otevřenost, uzavřenost
3. uzávěr
4. okolí
5. spojitost (ale ne stejnoměrná spojitost!)

Definice (Ekvivalentní metriky)**:** Metriky d_1, d_2 na téže množině jsou ekvivalentní, pokud

$$\mathrm{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

je homeomorfismus. Získáme tím prostor, ve kterém jsou všechny topologické záležitosti (spojitost, uzavřenost, . . .) zachovány.

Definice (Silně ekvivalentní metriky)**:** Metriky d_1 a d_2 na téže množině jsou silně ekvivalentní, pokud

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta d_1(x, y)$$

1.7 Součiny

Definice (Součin)**:** Pro $(X_1, d_i), i = 1, ..., n$ definujeme na kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i)$$

Získaný

$$\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

se nazývá součin prostorů (X_i, d_i). Píše se též

$$(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n).$$

1.8 Věta o spojitých zobrazeních

Věta (O spojitých zobrazeních)**:**

1. *Projekce* $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \to (X_j, d_j)$ *jsou spojitá zobrazení.*
2. *Buďte* $f_j : (Y, d') \to (X_j, d_j)$ *libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení* $f : (Y, d') \to \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ *splňující* $p_j \circ f = f_j$*, totiž zobrazení definované předpisem* $f(y) = (f_1(y), ..., f_n(y))$*, je spojité.*

Intuice: Jak to vypadá:

$$\begin{tikzcd}
(Y,d) \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[drr, "f_2"] \arrow[drrr, "f_3"] & & \prod_{i=1}^3 (X_i, d_i) \arrow[dl, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "p_3"] & \\
& (X_1, d_1) & (X_2, d_2) & (X_3, d_3)
\end{tikzcd}$$

Tedy pokud víme, že $(x_1, x_2, x_3) \in \prod(x_i, d_i)$, Pak

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), f_3(y))$$

$$(p_1 \circ f)(y) = p_1(f(y)) = p_1(f_1(y), f_2(y), f_3(y)) = f_1(y)$$

$$(p_2 \circ f)(y) = ... = f_2(y)$$

$$(p_3 \circ f)(y) = ... = f_3(y)$$

Existuje přesně jedno f takové, že

$$p_i \circ f = f_i$$

a je spojité.

2 Parciální derivace

Definice (Reálná funkce o n proměnných)**:**

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{E}_n$$

Podobně jako ve funkcích jedné proměnné se nemůžeme omezit na případy, kdy definiční obor je celý prostor $\mathbb{E}_n$. V případě funkcí jedné proměnné byly definiční obory obvykle intervaly nebo jednoduchá sjednocení intervalů. Tady budou definiční obory D složitější, často (ale ne vždy) otevřené množiny v $\mathbb{E}_n$.

O D se často mluví jako o oblasti na níž je funkce definovaná. To není termín (ve specifických kontextech slovo „oblast" termín je, tady ne).

2.1 Definice a značení

Definice (Parciální derivace)**:** Pro $f(x_1, ..., x_n)$ vezmeme

$$\phi_k(t) = f(x_1, ..., x_{k-1}, t, x_{k+1}, ...x_n) \qquad x_j \text{ pro } j \neq k \text{ fixované}$$

Parciální derivace funkce f podle x_k (v bodě $(x_1, ..., x_n)$) je (obvyklá) derivace funkce ϕ_k,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, ...x_n) - f(x_1, ..)}{h}.$$

Označení

$$\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_k} \text{ nebo } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, ..., x_n),$$

Pro $f(x, y)$ píšeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ a } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \text{ atd.}$$

Když $\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_k}$ existuje pro všechna $(x_1, ..., x_n)$ v nějaké oblasti D máme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}.$$

Když budeme mluvit o parciální derivaci bude vždy zřejmé máme-li na mysli funkci, nebo jen číslo (hodnotu té limity nahoře).

2.2 Totální diferenciál

Nespojitá funkce f může mít po souřadnicích všechny parciální derivace v každém bodě, to však ale neimplikuje spojitost. **Existence parciálních derivací neimplikuje spojitost!** Budeme potřebovat něco silnějšího. Připomeňte si tvrzení ekvivalentní se standardní derivací:

Tvrzení (Derivace)**:** *Existuje μ konvergující k 0 při $h \to 0$ a A takové, že*

$$f(x + h) - f(x) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

Intuice: $f(x + h) - f(x) = Ah$ vyjadřuje tečnu ke grafu funkce v bodě $(x, f(x))$ a $|h| \cdot \mu(h)$ je jakási malá chyba. Mysleme podobně o funkci $f(x, y)$ a uvažujme plochu:

$$S = \{(t, u, f(t, u)) : (t, u) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímek k S v bodě $(x, y, f(x, y))$, ale *ne tečnou rovinu*, která teprve bude uspokojivé rozšíření faktu nahoře.

2.2.1 Definice totálního diferenciálu

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n$ (místo absolutní hodnoty) definujeme $||\mathbf{x}|| = \max_i |x_i|$. h bude n-tice blízká nule.

Definice (Totální diferenciál)**:** Funkce f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$, existuje-li funkce μ spojitá v okolí U bodu $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\mu(\mathbf{o}) = 0$ a čísla $A_1, ..., A_n$ pro která

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + ||\mathbf{h}||\mu(\mathbf{h}).$$

S použitím skalárního součinu jde též zapsat jako

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{A}\mathbf{h} + ||\mathbf{h}||\mu(\mathbf{h})$$

2.2.2 Věty o totálním diferenciálu

Tvrzení (Spojitost, parciální derivace a totální diferenciál)**:** *Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Potom platí:*

1. *f je spojitá v $\boldsymbol{a}$,*
2. *f má všechny parciální derivace v $\boldsymbol{a}$, a to s hodnotami*

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_k} = A_k.$$

Důkaz:

1. Máme (dosazením do rovnice TD)

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})| + |\mu(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \cdot ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$$

a limita na pravé straně pro $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$ je 0.

2. Máme (dosazením do rovnice TD)

$$\frac{1}{h}(f(..., x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, ...) - f(x_1, ...)) = A_k + \mu((..., 0, h, 0, ...))\frac{||(0, ..., h, ..., 0)||}{h},$$

a limita na pravé straně je zřejmě A_k.

□

Teď již spojitost dostaneme. Vidíme, že v případě funkcí jedné proměnné není rozdíl mezi existencí derivace v bodě $\mathbf{a}$ a vlastností mít totální diferenciál v tomto bodě. V případě více proměnných je však tento rozdíl zcela zásadní. Může být trochu překvapující, že zatímco existence parciálních derivací mnoho neznamená, *existence spojitých parciálních derivací* je něco úplně jiného.

Věta (Spojité parciální derivace a totální diferenciál)**:** *Nechť má f spojité parciální derivace v okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Potom má v $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.*

Důkaz: Buď

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}, \mathbf{h}^{(1)} = (0, h_2, ..., h_n), \mathbf{h}^{(2)} = (0, 0, h_3, ..., h_n) \text{ atp.}$$

(takže $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{0}$). Potom máme

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n}(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k)})) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty 2.4 existují $0 \le \Theta_k \le 1$ takové, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k)}) = \frac{\partial f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, ..., a_n)}{\partial x_k} h_k$$

a můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} M &= \sum \frac{\partial f(a_1, ...a_k + \Theta_k h_k, ..., a_n)}{\partial x_k} h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \sum \left(\frac{\partial f(a_1, ..., a_k + \Theta_k h_k, ..., a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + ||\mathbf{h}|| \sum \left(\frac{\partial f(a_1, ..., a_k + \Theta_k h_k, ..., a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{||\mathbf{h}||}. \end{aligned}$$

Položíme

$$\mu(\mathbf{h}) = \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial f(a_1, ..., a_k + \Theta_k h_k, ..., a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{||\mathbf{h}||}. \\ 0 \text{ pokud } \mathbf{h} = \mathbf{o} \end{cases}$$

Jelikož $\left| \frac{h_k}{||\mathbf{h}||} \right| \le 1$ a jelikož jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ spojité, $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \mu(\mathbf{h}) = 0$. □

Důsledek: Můžeme tedy schematicky psát **spojité PD** $\Longrightarrow$ **TD** $\Longrightarrow$ **PD**.

2.3 Pravidla pro počítání parciálních derivací

Aritmetická pravidla jsou stejná jako pro obyčejné derivace (tady totiž obyčejnými derivacemi jsou). Trochu jinak tomu je u pravidla pro skládání. Pro derivace jedné proměnné se dokazuje z formule

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h|\mu(h)$$

tedy z diferenciálu (který je pro ně totéž jako existence derivace). Pravidlo pro skládání v nejjednodušší podobě následuje.

2.3.1 Složené funkce

Věta (Derivace složených funkcí více proměnných)**:** *Nechť má $f(\boldsymbol{x})$ totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Nechť mají $g_k(t)$ derivace v bodě b a nechť je $g_k(b) = a_k$ pro $k = 1, ...n$. Položme*

$$F(t) = f(\boldsymbol{g}(t)) = f(g_1(t), ..., g_n(t)).$$

Potom má F derivaci v b, totiž

$$F'(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_k} \cdot g_k'(b).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b+h)) - f(\mathbf{g}(b)) = \\ &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b) + (\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b))) - f(\mathbf{g}(b)) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} + \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) \max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}. \end{aligned}$$

Máme $\lim_{h\to 0}\mu(\mathbf{g}(b+h)-\mathbf{g}(b))=0$ jelikož jsou funkce g_k spojité v b. Jelikož funkce g_k mají derivace, jsou $\max_k \frac{|g_k(b+h)-g_k(b)|}{h}$ omezené v dostatečně malém okolí nuly. Limita poslední sčítance je tedy nula a máme

$$\begin{aligned}
F'(b) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F(b+h)-F(b)) \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{g_k(b+h)-g_k(b)}{h} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k \lim_{h\to 0}\frac{g_k(b+h)-g_k(b)}{h} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} g_k'(b)
\end{aligned}$$

Kde v poslední rovnosti využíváme tvrzení 2.2.2, díky kterému $A_k=\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k}$. □

Intuice: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem vnější funkce f nemá žádný důvod preferovat hlavní osy, v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

Věta (Řetízkové Pravidlo)**:** *Nechť má $f(\boldsymbol{x})$ totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Nechť mají funkce $g_k(t_1,...,t_r)$ parciální derivace v $\boldsymbol{b}=(b_1,...,b_r)$ a nechť je $g_k(\boldsymbol{b})=a_k$ pro $k=1,...,n$. Potom má funkce*

$$(f\circ \boldsymbol{g})(t_1,...,t_r)=f(\boldsymbol{g}(t))=f(g_1(t),...,g_n(t))$$

všechny parciální derivace v $\boldsymbol{b}$, a platí

$$\frac{\partial (f\circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{b})}{\partial t_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial g_k(\boldsymbol{b})}{\partial t_j}.$$

Důkaz: Skládali jsme

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Skládejme místo f m-tici funkcí $\mathbf{f}=(f_1,...,f_m)$, tedy $\mathbf{f}:\mathbb{E}_n\to\mathbb{E}_m$

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{E}_m$$

Pravidlo z předchozí věty dá tedy

$$\frac{\partial (f_i\circ \mathbf{g})(b)}{\partial t_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

□

Poznámka: Zavedeme-li matice $D\mathbf{f}=\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k}\right)_{ik}$ je $D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})=D\mathbf{f}\cdot D\mathbf{g}$ (napravo násobení matic), a tak to má být. $D\mathbf{h}$ je matice lineární aproximace funkce $\mathbf{h}$: *lineární aproximace se skládají spolu s aproximovanými funkcemi.*

2.3.2 Násobení

$$f(u,v)=u\cdot v$$

Potom $\frac{\partial f}{\partial u}=v$ a $\frac{\partial f}{\partial v}=u$ a pro $u=\psi(x)$ a $v=\phi(x)$ platí:

$$(\phi(x)\psi(y))'=\frac{\partial f}{\partial u}\phi'(x)+\frac{\partial f}{\partial v}\psi'(x)=\phi(x)\psi'(x)+\phi'(x)\psi(x)$$

2.3.3 Dělení

$$f(u,v) = \frac{u}{v}$$

Potom $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$ a pro $u = \psi(x)$ a $v = \phi(x)$ platí:

$$\left(\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right)' = \frac{\partial f}{\partial u}\phi'(x) - \frac{\partial f}{\partial v}\psi'(x) = \frac{1}{\psi(x)}\phi'(x) + \frac{1}{\psi(x)^2}\psi'(x) = \frac{\psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2}$$

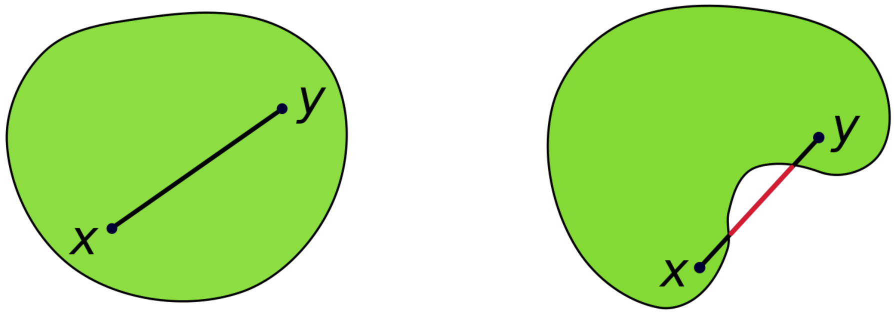
2.4 Lagrangeovy věty

Věta (Lagrangeova věta v jedné proměnné)**:** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ a má na (a,b) derivaci. Pak existuje bod $c \in (a,b)$ t. ž. tečna v bodě c je rovná přímce procházející $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \textit{nebo ekvivalentně} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Definice (Konvexní podmnožina)**:** Podmnožina $U \subseteq \mathrm{E}_n$ je konvexní, pokud

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \quad \Longrightarrow \quad \forall t, 0 \le t \le 1, (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in U$$



(a) Konvexní (b) Nekonvexní

Příklad konvexní a nekonvexní podmnožiny E_n

Věta (Lagrangeova věta ve více proměnných)**:** *Nechť má f spojité parciální derivace v konvexní otevřené množině $U \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom pro libovolné dva body $x, y \in U$ $\exists 0 \le \theta \le 1$ takové, že:*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j}(y_j - x_j)$$

Důkaz: Položme $F(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ a $\mathbf{g}$ t. ž. $g_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$. Potom máme $F(t) = f \circ \mathbf{g} = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ a

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} g_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j}(y_j - x_j)$$

Podle Lagrangeovy věty $\exists \theta : 0 \le \theta \le 1$ a díky tomu, že $f(\mathbf{x}) = F(0)$ a $f(\mathbf{y}) = F(1)$ dostáváme:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0) = F'(\theta)$$

□

Poznámka: Často se užívá v tomto tvaru (porovnej s formulí pro totální diferenciál):

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta\mathbf{h})}{\partial x_j} h_j$$

2.5 Záměnnost pořadí při parciálních derivacích

Tvrzení (O záměnnosti)**:** *Mějme funkci $f(x,y)$ takovou, že existují parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, které jsou spojité v nějakém okolí bodu (x,y). Potom:*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Důkaz: Pokusíme se spočíst obě derivace v jednom kroku, tedy počítejme limitu $\lim_{h\to 0} F(h)$ funkce

$$F(h) = \frac{f(x+h,y+h) - f(x,y+h) - f(x+h,y) + f(x,y)}{h^2}$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} \varphi_h(y) &= f(x+h,y) - f(x,y) \text{ a} \\ \psi_h(x) &= f(x,y+h) - f(x,y), \end{aligned}$$

dostaneme pro $F(h)$ dva výrazy:

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) \\ F(h) &= \frac{1}{h^2}(\psi_h(x+h) - \psi_h(x)). \end{aligned}$$

První: Funkce φ_h má derivaci (podle y, jinou proměnnou nemá)

$$\varphi_h'(y) = \frac{\partial f(x+h,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

a tedy podle Lagrangeovy věty 2.4 (druhý tvar, rozdíl je $y+h-y=h$):

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) = \frac{1}{h}\varphi_h'(y+\theta_1 h) \\ &= \frac{\partial f(x+h,y+\theta_1 h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y+\theta_1 h)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Potom znovu podle Lagrangeovy věty

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h}{\partial y}\right)$$

pro nějaká θ_1, θ_2 mezi 0 a 1. Druhá, $\frac{1}{h^2}(\varphi_h(x+h) - \varphi_h(x)))$ dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x+\theta_4 h, y+\theta_3 h}{\partial x}\right)$$

Obě $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ a $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ jsou spojité (x,y), a $\lim_{h\to 0} F(h)$ můžeme počítat z kteréhokoli výrazu (první nebo druhá):

$$\lim_{h\to 0} F(h) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

□

Důsledek: Nechť má funkce f v proměnných spojité parciální derivace do řádu k. Potom hodnoty těchto derivací záleží pouze na tom, kolikrát bylo derivováno v každé z proměnných $x_1, ..., x_n$. Tedy za daných předpokladů můžeme obecné parciální derivace řádu $r \leq k$ psát

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} ... \partial x_n^{r_n}} \text{ kde } r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$$

$$(r_j = 0 \text{ indukuje absenci symbolu } \partial x_j)$$

2.6 Věta o konvergentní podposloupnosti

Věta (Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu lze vybrat konvergentní podposloupnost)**:** *Mějme $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall n : a \leq x_n \leq b$. Potom existuje podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ která konverguje v $\mathbb{R}$ a platí $a \leq \lim_n x_{k_n} \leq b$*

Důkaz: Vezměme

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho n}\}$$

M je neprázdná a omezená protože $a \in M$ a b je horní mez M. Musí tedy existovat $s = sup(M)$ a platí $a \leq s \leq b$. Dále, pro každé n je množina

$$K(n) = \{k : s - \frac{1}{n} < x_k < s + \frac{1}{n}\}$$

nekonečná: skutečně, máme $x > s - \varepsilon$ takové, že $x_n > x$ pro nekonečně mnoho n, zatím co podle definice množiny M je jen konečně mnoho n takových, že $x_n \geq s + \varepsilon$. Zvolme k_1 tak, aby

$$s - 1 < x_{k_1} < s + 1.$$

Mějme zvolena $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ taková, že $j = 1, ..., n$

$$s - \frac{1}{j} < x_{k_j} < s + \frac{1}{j}.$$

Jelikož $K(n+1)$ je nekonečná, můžeme zvolit $k_{n+1} > k_n$ tak, aby

$$s - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} < s + \frac{1}{n+1}.$$

Takto zvolená podposloupnost $(x_{k_n})_n$ naší $(x_n)_n$ zřejmě konverguje k s. □

3 Kompaktní prostory

Definice (Kompaktní metrický prostor)**:** Metrický prostor (X, d) je kompaktní, pokud každá posloupnost v něm obsahuje konvergentní podposloupnost.

3.1 Vlastnosti kompaktních prostorů

Tvrzení (Podprostor kompaktního prostoru)**:** *Podprostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený.*

Důkaz:

$\Leftarrow$ Buď Y uzavřený podprostor kompaktního X a buď $(y_n)_n$ posloupnost v Y. Jako posloupnost v X má konvergentní podposloupnost s limitou a z uzavřenosti je konvergentní podposloupností a tato limita je v Y.

$\neg \Leftarrow \neg$ Nechť Y není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $y = \lim_n y_n \notin Y$. Potom $(y_n)_n$ nemůže mít podposloupnost konvergentní v Y protože každá její podposloupnost konverguje k y.

□

Tvrzení (Uzavřenost kompaktního podprostoru)**:** *Buď (X, d) libovolný metrický prostor a buď podprostor $Y \subseteq X$ kompaktní. Potom Y je uzavřený v (X, d).*

Důkaz: Nechť $(y_n)_n$ posloupnost v Y konverguje v X k limitě y. Potom každá podposloupnost $(y_n)_n$ konverguje k y a tedy je $y \in Y$. □

Věta (Součin kompaktních prostorů)**:** *Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.*

Důkaz: Stačí dokázat pro součin dvou prostorů (součin prostorů je komutativní). Buďte $(X, d_1), (X, d_2)$ kompaktní a buď $((x_n, y_n))_n$ posloupnost v $X \times Y$. Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ a konvergentní podposloupnost $(y_{k_{l_n}})_n$ posloupnosti $(y_{k_n})_n$. Potom je

$$((x_{k_{l_n}}, y_{k_{l_n}}))_n$$

konvergentní podposloupnost posloupnosti $((x_n, y_n))_n$. □

3.2 Omezené metrické prostory

Definice (Omezený metrický prostor)**:** Metrický prostor (X, d) je omezený, jestliže pro nějaké K platí

$$\forall x, y \in X : d(x, y) < K.$$

Tvrzení (Omezenost kompaktního prostoru)**:** *Každý kompaktní prostor je omezený.*

Důkaz: Zvolme x_1 libovolně a x_n tak, aby $d(x_1, x_n) > n$. Posloupnost $(x_n)_n$ nemá konvergentní podposloupnost; kdyby x byla limita takové podposloupnosti, bylo by pro dost velké n nekonečně mnoho členů této podposloupnosti blíže k x_1 než $d(x_1, x_n) + 1$, což je spor. □

3.3 Euklidovské metrické prostory

Poznámka: Kompaktní interval v $\mathbb{E}_n$: součin intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$.

Věta (Kompaktnost podprostoru $\mathbb{E}$)**:** *Podprostor euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.*

Důkaz:

$\Rightarrow$: Že je uzavřený a omezený už víme (3.1, 3.2).

$\Leftarrow$: Buď nyní $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ omezený a uzavřený. Jelikož je omezený, tak pro dostatečně velký kompaktní interval platí

$$Y \subseteq J^n \subseteq \mathbb{E}_n.$$

J^n je kompaktní jako součin intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$, a jelikož je Y uzavřený v $\mathbb{E}_n$ je též uzavřený v J^n a tedy kompaktní.

□

3.4 Spojitá zobrazení

Tvrzení (Obraz spojitého zobrazení na kompaktním prostoru)**:** *Buď $f : (X, d) \to (Y, d')$ spojité zobrazení a buď $A \subseteq X$ kompaktní. Potom je $f[A]$ kompaktní.*

Důkaz: Buď $(y_n)_n$ posloupnost v $f[A]$. Zvolme $x_n \in A$ tak, aby $y_n = f(x_n)$. Buď $(x_{k_n})_n$ konvergentní podposloupnost Potom je $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$ konvergentní podposloupnost $(x_n)_n$. □

Tvrzení (Extrémy spojité funkce na kompaktním prostoru)**:** *Buď (X, d) kompaktní. Potom každá spojitá funkce $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ nabývá maxima i minima (t.j. nejsou nekonečné).*

Důkaz: Buď $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní. Je to tedy omezená množina a musí mít supremum $M \in \mathbb{R}$ a infimum $m \in \mathbb{R}$. Zřejmě máme $d(m, Y) = d(M, Y) = 0$ a jelikož Y je uzavřená, $m, M \in Y$. Víme, že spojitá f je charakterizována tím, že všechny vzory uzavřených množin jsou uzavřené. Nyní vidíme, že je-li definiční obor kompaktní, platí též, že obrazy uzavřených podmnožin jsou uzavřené. □

Věta (Vzájemně jednoznačné spojité zobrazení)**:** *Je-li (X, d) kompaktní a je-li $f : (X, d) \to (Y, d')$ vzájemně jednoznačné spojité zobrazení, pak je f homeomorfismus.*[1]

Důkaz: Buď B uzavřená v Z. Potom je $A = g^{-1}[B]$ uzavřená $\implies$ kompaktnost v X $\implies$ $f[A]$ je kompaktní $\implies$ uzavřená v Y. Jelikož je f zobrazení na, máme $f[f^{-1}[C]] = C\ \forall C$. Proto je

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A]$$

uzavřená. □

3.5 Cauchyovské posloupnosti

Definice (Cauchyovská posloupnost)**:** Posloupnost $(x_n)_n$ v (X, d) je Cauchyovská, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Intuice: Intuitivně se jedná o posloupnost, jejíž prvky se k sobě dostávají libovolně blízko (tj. pro každou vzdálenost ε je jen konečně mnoho prvků od sebe dál než ε).

Tvrzení (Konvergence Cauchyovské posloupnosti)**:** *Nechť má Cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost. Potom posloupnost konverguje k limitě podposloupnosti.*

Důkaz: Nechť je $(x_n)_n$ Cauchyovská posloupnost, $(x_{k_n})_n$ její podposloupnost a nechť $\lim_n(x_{k_n}) = x$. Buď $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pro $\forall m, n \geq n_1$ a $d(x_{k_n}, x) \leq \varepsilon$ pro $\forall n \geq n_2$. Položíme-li $n_0 = \max(n_1, n_2)$, máme pro $\forall n \geq n_0$ (protože $k_n \geq n$)

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < 2\varepsilon.$$

V první nerovnosti využíváme trojúhelníkovou nerovnost metriky. □

Tvrzení (Cauchyovská posloupnost součinu)**:** *Posloupnost $(x_1^1, ..., x_n^1), (x_1^2, ..., x_n^2), ..., (x_1^k, ..., x_n^k), ...$ je Cauchyovská v $\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ právě když každá z posloupností $(x_i^k)_k$ je Cauchyovská v (X_i, d_i).*

Důkaz:

- $\Rightarrow$: Plyne bezprostředně z toho, že $d_i(u_i, v_i) \leq d((u_j)_j, (v_j)_j)$.
- $\Leftarrow$: Nechť je každá $(x_i^k)_k$ Cauchyovská. Pro $\varepsilon > 0$ a i zvolme k_i tak, aby pro $k, l \geq k_i$ bylo $d_i(x_i^k, x_i^l) < \varepsilon$. Potom pro $k, l \geq \max_i k_i$ máme

$$d((x_1^k, ..., x_n^k), (x_1^l, ..., x_n^l)) < \varepsilon.$$

□

Věta (Součin úplných prostorů)**:** *Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně, $\mathbb{E}_n$ je úplný.*

Důsledek: Podprostor Y euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je úplný, právě když je uzavřený.

3.6 Úplné metrické prostory

Definice: Metrický prostor (X, d) je úplný, pokud v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje.

Příklad: $\mathbb{R}$ úplný je, ale např. $\mathbb{Q}$ úplný není – uvážíme-li posloupnost zlomků, které se v $\mathbb{R}$ přibližují k $\sqrt{2}$, tak taková posloupnost v $\mathbb{Q}$ nemá limitu.

[1] Obecněji: Nechť $f : (X, d) \to (Y, d')$ je spojité a na. Mějme potom $g : (X, d) \to (Z, d'')$ spojité a $h : (Y, d') \to (Z, d'')$ takové, že $h \circ f = g$. Potom je h spojité.

Tvrzení (Úplnost podprostoru)**:** *Podprostor úplného prostoru je úplný, právě když je uzavřený.*

Důkaz:

$\Leftarrow$ Buď $Y \subseteq (X, d)$ uzavřený. Buď $(y_n)_n$ Cauchyovská v Y. Potom je Cauchyovská a tedy konvergentní v X a kvůli uzavřenosti je limita v Y.

$\neg \Leftarrow \neg$ Nechť Y není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $\lim_n y_n \notin Y$. Potom je $(y_n)_n$ Cauchyovská v X a jelikož je vzálenost stejná, též v Y. Ale v Y nekonverguje.

$\square$

Tvrzení (Úplnost kompaktního prostoru)**:** *Každý kompaktní prostor je úplný.*

Důkaz: Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost a tedy konverguje. $\square$

4 Implicitní funkce

4.1 Ilustrační příklady

Příklad (Obecný)**:** Mějme spojité reálné funkce $F_i(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$ pro každé $i \in \{1, ..., n\}$ v $n + m$ proměnných. Určuje systém rovnic

$$\begin{aligned} F_1(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\ F_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) &= 0 \end{aligned}$$

v nějakém smyslu funkce

$$f_i \equiv y_i(x_1, ..., x_m)$$

pro $i \in \{1, ..., n\}$? Pokud ano, jak a kde je určuje a jaké mají funkce vlastnosti?

Příklad ($F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$)**:** Mějme $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, neboli rovnici

$$x^2 + y^2 = 1$$

Několik pozorování:

- Pro některá x_0 jako například $x_0 < -1$ řešení neexistuje, o funkci $y(x)$ nemluvě.
- Přestože řešení v nějakém okolí x_0 existuje, nemůžeme v nějakých situacích hovořit o funkci. Potřebujeme kolem řešení (x_0, y_0) vymezit okolí jak x_0, tak y_0.
- Máme také případy, jako ten, kdy $x_0 = 1$, kde je v okolí mnoho řešení, ale žádný(ani jednostranný) interval, kde by y bylo jednoznačné.

V případě $F(x, y)$ už zádná další situace nenastane.

Intuice: 3b1b má na svém YouTubu o úvodu do implicitních funkcí hezké video [odkaz].

4.2 Věty o implicitní funkci

Věta: *Buď $F(x, y)$ reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu (x_0, y_0). Nechť má F spojité parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť platí:*

$$F(x_0, y_0) = 0$$
$$\left|\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right| \neq 0$$

Potom $\exists \delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists! y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) : F(x, y) = 0$. Dále, označíme-li toto jediné y jako $y = f(x)$, potom získaná $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ má spojité derivace do řádu k.

Definice (Jacobiho determinant)**:** Pro konečnou posloupnost funkcí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, y_1, ..., y_m), ..., F_m(\mathbf{x}, y_1, ..., y_m))$$

a pro $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_m)$ se definuje Jacobiho determinant (Jakobián) jako

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j \in \{1,...,m\}}$$

Intuice: Stejně jako determinant v lineární algebře určuje, jak daná matice transformuje prostor (natahuje vektory v daných směrech), tak Jacobiho matice určuje, jak vektorová funkce $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ při transformaci oblasti $U \subseteq \mathrm{E}_n$ na $\mathbf{f}[U]$ natahuje nebo stlačuje objemy malých kousků oblasti U okolo $\mathbf{x}$ v poměru (absolutní hodnoty) Jakobiánu.

Poznámka: 3b1b má o Jakobiánu na KhanAcademy super video [odkaz].

Věta: *Buďte $F_i(\mathbf{x}, y_1, ..., y_m)$ pro $i \in 1, ..., m$ funkce $n + m$ proměnných se spojitými parciálními derivacemi do řádu $k \geq 1$. Buď*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{o}$$
$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0$$

Potom existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že pro každé

$$\mathbf{x} \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \cdots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$\mathbf{y} \in (y_1^0 - \Delta, y_1^0 + \Delta) \times \cdots \times (y_m^0 - \Delta, y_m^0 + \Delta)$$

takové, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

5 Extrémy

Věta (O hledání extrému funkcí)**:** *Buďte $f, g_1, ..., g_k$ reálné funkce definované na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť mají spojité parciální derivace. Nechť je hodnost matice*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy $k \leq n$, v každém bodě oboru D.

Jestliže funkce f nabývá v bodě $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami

$$g_i(x_1, ..., x_n) = 0 \forall i \in \{1, ..., k\}$$

pak existují čísla $\lambda_1, ..., \lambda_k$ taková, že $\forall i \in 1, ..., n$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$$

Důkaz: Matice M má hodnost k právě když aspoň jedna její $k \times k$ podmatice M je regulární (a tedy má nenulový determinant). Dejme tomu,

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$

Potom podle věty o implicitních funkcích máme okolí bodu $\mathbf{a}$ funkce $\phi_i(x_{k+1}, ..., x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi takové, že (pišme $\tilde{\mathbf{x}}$ pro $(x_{k+1}, ..., x_n)$)

$$g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), ..., \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0 \text{ pro } i = 1, ..., k.$$

tedy lokální maximum nebo minimum funkce $f(\mathbf{x})$ v $\mathbf{a}$ podmíněné danými vazbami dává lokální maximum či minimum (nepodmíněné) funkce

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), ..., \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}),$$

v $\tilde{\mathbf{a}}$, a tedy je

$$\frac{\partial F(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i = k+1, ..., n,$$

to jest, podle řetízkového pravidla

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \text{ pro } i = k+1, ..., n.$$

Derivováním konstantní $g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}, ..., \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0$ dostaneme pro $j = 1, ..., k$

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \text{ pro } i = k+1, ..., n.$$

Dále použijeme znovu vlastnost toho, že determinant je nenulový. Vzhledem k hodnosti matice má systém lineárních rovnic

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0, i = 1, ..., k$$

jediné řešení $\lambda_1, ..., \lambda_k$. To jsou rovnosti z tvrzení, ale jen pro $i \leq k$. Musíme ještě dokázat, že to platí i pro $i > k$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= \\
&= -\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\
&= -\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\
&= -\sum_{r=1}^{n} 0 \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

5.1 Regulární zobrazení

Definice (Regulární zobrazení)**:** Buď $U \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená a nechť mají f_i pro $i \in 1, ..., n$ spojité parciální derivace. Výsledné zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{E}_n$$

je regulární, jestliže

$$\forall \mathbf{x} \in U : \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \neq 0$$

Intuice: Regularita je zobecnění pojmu prostého zobrazení pro vícerozměrná zobrazení.

Tvrzení (Obraz regulární funkce)**:** *Je-li* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *regulární, je obraz* $\mathbf{f}[V]$ *každé otevřené podmnožiny* $V \subseteq U$ *otevřený.*

Důkaz: Vezměme $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$. Definujeme $\mathbf{F} : V \times \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ předpisem

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i.$$

Potom je $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ a $\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{x})} \neq 0$, a tedy můžeme použít větu o IF a dostaneme $\delta > 0$ a $\Delta > 0 : \forall \mathbf{y} : ||\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|| < \delta \; \exists \mathbf{x} : ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|| < \Delta$ a $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i = 0$. To znamená, že máme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (pozor, y_i jsou zde proměnné, x_j hledané funkce a

$$\Omega(\mathbf{y}^0, \delta) = \{\mathbf{y} : ||\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|| < \delta\} \subseteq \mathbf{f}[V].$$

□

Tvrzení (Inverz regulárního zobrazení)**:** *Buď* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *regulární zobrazení. Potom* $\forall \mathbf{x}^0 \in U \exists$ *otevřené okolí* V *takové, že restrikce* $\mathbf{f}|V$ *je bijekce. Navíc, zobrazení* $\mathbf{g} : f[V] \to \mathbb{E}_n$ *inverzní k* $\mathbf{f}|V$ *je regulární.*

Důkaz: Znovu použijeme zobrazení $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n)$, kde $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i$. Pro dost malé $\Delta > 0$ máme právě jedno $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ takové, že $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$ a $||\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|| < \Delta$. Toto $\mathbf{g}$ má navíc spojité parciální derivace. Máme

$$D(id) = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) \cdot D(\mathbf{g}).$$

Podle řetízkového pravidla (a věty o násobení determinantů) je

$$\frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} \cdot \frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})} = \det D(\mathbf{f}) \cdot \det D(\mathbf{g}) = 1$$

a tedy je pro každé $\mathbf{y} \in \mathbf{f}[V]$: $\frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) \neq 0$. □

Důsledek: Prosté regulární zobrazení $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ má regulární inverzi $\mathbf{g} : \mathbf{f}[U] \to \mathbb{E}_n$

6 Objemy a obsahy

Pro zbytek sekce $A \subseteq \mathbb{E}_m$ (speciálně $\mathbb{E}_2$)

6.1 Vlastnosti

- $A \subseteq B \implies \mathbf{vol}(A) \leq \mathbf{vol}(B)$
- A, B disjunktní $\implies \mathbf{vol}(A \cup B) = \mathbf{vol}(A) + \mathbf{vol}(B)$
- **vol** je zachován isometrií (zobrazením zachovávajíci vzdálenosti)

- V $\mathbb{E}_2$: $\mathbf{vol}(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
- V $\mathbb{E}_n$: $\mathbf{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i\rangle = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$
- $\mathbf{vol}(A \cup B) = \mathbf{vol}(A) + \mathbf{vol}(B) - \mathbf{vol}(A \cap B)$.
  - pokud jsou všechny definované
  - $\mathbf{vol}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n) \implies$ princip inkluze a exkluze

7 Stejnoměrná spojitost

Definice (Stejnoměrná spojitost)**:** Řekneme, že $f : (X, d) \to (Y, d')$ je stejnoměrně spojité, je-li

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y : d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Příklad: $f = (x \mapsto x^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá. Máme $|f(x) - f(y)| = |x+y| \cdot |x-y|$; tedy abychom dostali $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ v blízkosti $x = 100$ potřebujeme δ stokrát menší než v blízkosti $x = 1$.

Věta (Spojitost zobrazení na kompaktním prostoru)**:** *Je-li (X, d) kompaktní, je každé spojité $f : (X, d) \to (Y, d')$ stejnoměrně spojité. Zejména to platí pro spojité reálné funkce na kompaktních intervalech.*

Důkaz: Nechť $f : (X, d) \to (Y, d')$ není stejnoměrně spojité. Potom $\exists \varepsilon > 0 : \forall n\ \exists x_n, y_n :$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$$

ale

$$d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$. Označme $a = \lim_n x_{k_n}$. Potom podle $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ je též $a = \lim_n y_{k_n}$. Podle $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ nemůže být $f(a) = \lim_n f(x_{k_n})$ a zároveň $f(a) = \lim_n f(y_{k_n})$, a tedy f není ani spojité. $\square$

8 Opakování Riemannova integrálu v jedné proměnné

Definice (Rozdělení) intervalu $\langle a, b\rangle$ je posloupnost

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Definice (Zjemnění) rozkladu P je rozklad P' takový, že

$$P' : a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{m-1} < t'_m = b$$

$$\text{kde } \{t_j : j = 1, ..., n-1\} \subseteq \{t'_j : j = 1, ..., m-1\}.$$

Definice (Jemnost) rozkladu P je

$$\mu(P) = \max_j (t_j - t_{j-1}).$$

Definice (Horní/dolní součty)**:** Pro omezenou $f : J = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a P definujeme dolní a horní součty

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1}) \text{ resp.}$$

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1})$$

kde

$$m_j = \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}, M_j = \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}.$$

Tvrzení (Vlastnosti součtů)**:**

- *Pokud P' zjemňuje P dostáváme*

$$s(f, P) \leq s(f, P') \text{ a } S(f, P) \geq S(f, P')$$

- *Pro každá dvě P_1, P_2 je*

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Definice ((Horní/dolní) Riemannův integrál) f přes $\langle a, b\rangle$ jsou výrazy:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f, P) : P \text{ rozdělení}\} \qquad \text{a} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f, P) : P \text{ rozdělení}\}$$

Jsou-li si rovny, mluvíme o Riemannově integrálu funkce f přes $\langle a, b\rangle$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

8.1 Existence Riemannova integrálu

Věta (Kritérium existence Riemannova integrálu)**:** *Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje právě když $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ rozdělení P takové, že*

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Důkaz:

$\Rightarrow$: Nechť $\int_a^b f(x)dx$ existuje a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existují rozdělení P_1 a P_2 takové, že

$$S(f, P_1) < \int_a^b f(x)dx + \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(f, P_2) > \int_a^b f(x)dx - \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Potom platí pro společné zjemnění P těch dvou P_1, P_2

$$S(f, P) - s(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Nechť druhé tvrzení platí. Zvolme $\varepsilon > 0 : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Potom je

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, P) < s(f, P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon,$$

a jelikož ε bylo libovolně malé, vidíme, že $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$.

□

Věta (Existence Riemannova integrálu pro spojité funkce v $\mathbb{R}$)**:** *Pro každou spojitou $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje.*

Důkaz: Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby

$$\forall x, y : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Je-li $\mu(P) < \delta$ máme $t_j - t_{j-1} < \delta$ pro všechna j, a tedy

$$M_j - m_j = \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} - \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} \leq$$
$$\leq \sup\{|f(x) - f(y)| : t_{j-1} \leq x, y \leq t_j\} \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$$

takže

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum (t_j - tj - 1) = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon.$$

□

8.2 Integrální věta o střední hodnotě

Věta (Integrální věta o střední hodnotě)**:** *Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom existuje $c \in \langle a, b\rangle$ t. ž.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

Důkaz: Položme $m = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ a $M = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ Zřejmě

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Existuje tedy K takové, že $m \leq K \leq M$ a $\int_a^b f(x)\,dx = K(b-a)$. Jelikož f je spojitá, existuje $c \in \langle a, b\rangle$ takové, že $K = f(c)$. □

8.3 Základní věta analýzy

Věta (Základní věta analýzy)**:** *Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a, b\rangle$ definujeme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Potom je $F'(x) = f(x)$

Důkaz: Pro $h \neq 0$ máme

$$\frac{1}{h}(F(x + h) - f(x)) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \frac{1}{h} f(x + \theta h)h = f(x + \theta h)$$

V druhé úpravě používáme úvahu $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ a ve třetí integrální větu o střední hodnotě. □

Důsledek:

1. Spojitá funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci spojitou na $\langle a, b\rangle$. Pro kteroukoli primitivní funkci G funkce f na (a, b) spojitou na $\langle a, b\rangle$ platí

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

2. Integrální věta o střední hodnotě:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f = f(c)(b - a) = F'(c)(b - a)$$

9 Riemannův integrál ve více proměnných

9.1 Definice

Definice (n-rozměrný kompaktní interval) (v $\mathbb{E}_n$) je

$$J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$$

Definice (Rozdělení intervalu) J je posloupnost rozdělení $P = (P^1, ..., P^n)$:

$$P^j : a_j = t_{j,0} < t_{j,1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j$$

Definice (Cihly)**:** Intervalům

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1}\rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}\rangle$$

říkáme **cihly rozdělení** P a

$$\mathcal{B}(P)$$

je množina všech cihel rozdělení P. Je to skoro disjunktní rozdělení intervalu J. Různé cihly z $\mathcal{B}(P)$ se totiž setkávají jen v podmnožinách okrajů, tedy v množinách objemu 0, díky čemuž platí:

$$\mathbf{vol}(J) = \sum\{\mathbf{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(J)\}.$$

Definice (Průměr (diametr)) intervalu $J = \langle r_1, s_1\rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n\rangle$ je

$$\mathbf{diam}(J) = \max_i(s_i - r_i)$$

Definice (Jemnost) rozdělení P je

$$\mu(P) = \max\{\mathbf{diam}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}$$

Definice (Zjemnění)**:** Rozdělení $Q = (Q^1, ...Q^n)$ zjemňuje rozdělení $P = (P^1, ..., P^n)$ jestliže každé Q^j zjemňuje P^j. Vytváří/indukuje tak rozdělení Q_B $\forall B \in \mathcal{B}(P)$ a jistě platí

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup\{\mathcal{B}(Q_B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Pozorování: Každá dvě rozdělení P, Q n-rozměrného kompaktního intervalu J mají společné zjemnění.

Definice („Supremum/infimum“ na kompaktním intervalu)**:** Je dána omezená $f : J \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném kompaktním intervalu J a $B \subseteq J$ je n-rozměrný kompaktní podinterval intervalu J. Položme

$$m(f, B) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \qquad \text{a} \qquad M(f, B) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}.$$

Pozorování: $m(f, B) \leq M(f, B)$ a je-li $C \subseteq B$, pak

$$m(f, C) \geq m(f, B) \qquad \text{a} \qquad M(f, C) \leq M(f, B).$$

Definice (Horní/dolní součty)**:** Pro rozdělení P intervalu J a omezenou funkci $f : J \to \mathbb{R}$ definujeme

$$s_J(f, P) = \sum\{m(f, B) \cdot \mathbf{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\},$$

$$S_J(f, P) = \sum\{M(f, B) \cdot \mathbf{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Pozorování (obecné)**:** $f : X \to \mathbb{R}$ je omezená, $X = \bigcup X_i$ a $X_i = \bigcup X_{ij}$ jsou konečná skoro disjunktní sjednocení. Nechť dále (a analogicky pro m infima):

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in X_i\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x) : x \in X_{ij}\}$$

Triviálně $M_{ij} \leq M_i$ (M_i je horní mez množiny $\{f(x) : x \in X_{ij}\}$), tedy:

$$\begin{aligned}\sum M_i \mathbf{vol}(X_i) &= \sum_i M_i \sum_j \mathbf{vol}(X_{ij}) \\ &= \sum_{ij} M_i \mathbf{vol}(X_{ij}) \\ &\geq \sum_{ij} M_{ij} \mathbf{vol}(X_{ij})\end{aligned}$$

Tvrzení: *Nechť Q zjemňuje P. Potom*

$$s(f, Q) \geq s(f, P) \quad a \quad S(f, Q) \leq S(f, P)$$

Důkaz: Použijeme předchozí pozorování pro $\{X_i \mid i\} = \mathcal{B}(P)$, $\{X_{ij} \mid j\} = \mathcal{B}(Q_B)$ a samozřejmě i pro $\{X_{ij} \mid ij\} = \mathcal{B}(Q)$. □

Tvrzení: *Pro libovolná dvě rozdělení P, Q intervalu J máme $s(f, P) \leq S(f, Q)$.*

Důkaz: Jelikož je triviálně $s(f, P) \leq S(f, P)$, použitím společného zjemnění R rozdělení P, Q dostaneme

$$s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q).$$

□

Definice ((Horní/dolní) Riemannův integrál)**:** Množiny $\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}$ a $\{S(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}$ jsou shora/zdola omezené (předchozí tvrzení) a můžeme definovat dolní/horní Riemannův integrál funkce f přes J jako

$$\underline{\int_J} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\} \qquad \text{a} \qquad \overline{\int_J} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf\{S(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, máme Riemannův integrál funkce f přes J, značíme[2].

$$\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{nebo prostě} \quad \int_J f$$

9.2 Existence

Věta (Kritérium existence Riemannova integrálu)**:** *Riemannův integrál $\int_J f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ existuje právě když $\forall \varepsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že*

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \varepsilon$$

Důkaz: Nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P)$$

z toho dostaneme

$$\overline{\int} \leq S_J(f, P) \leq \varepsilon + s_J(f, P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int}$$

pro libovolně malé ε. □

[2] Někdy se také značí jako $\int_J f(x_1, ..., x_n) dx_1, ...x_n$ nebo $\int_J f(x_1, ..., x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

9.3 Riemannův integrál pro spojité funkce

Věta (Riemannův integrál pro spojité funkce)**:** *Každá spojitá funkce $f : J \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál $\int_J f$.*

Důkaz: V $\mathbb{E}_n$ budeme používat metriku σ definovanou předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$$

Jelikož je f stejnoměrně spojitá, můžeme pro $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ takové, že

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(J)}$$

Připomeňme si jemnost $\mu(P)$. Je-li $\mu(P) < \delta$, pak je $\mathrm{diam}(B) < \delta$ pro všechny $B \in \mathcal{B}(P)$ a tedy

$$\begin{aligned} M(f, B) - m(f, B) &= \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(J)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum\{(M(f, B) - m(f, B)) \cdot \mathrm{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(J)} \sum\{\mathrm{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(J)} \mathrm{vol}(J) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

9.4 Fubiniova věta

Věta (Fubiniova věta)**:** *Vezměme součin $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ intervalů $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť existuje*

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{xy}$$

a nechť pro každé $\mathbf{x} \in J'$, resp. $\mathbf{y} \in J''$, existuje

$$\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \qquad a \qquad \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

Potom je

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{xy} = \int_{J'} \left(\int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{J''} \left(\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}$$

Příklad: Ve dvou proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Ve třech proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

Obecně

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

Důkaz: Položme

$$F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

Dokážeme, že $\int_{J'} F$ existuje a že

$$\int_J f = \int_{J'} F$$

Zvolme rozdělení P intervalu J tak, aby

$$\int f - \varepsilon \le s(f, P) \le S(f, P) \le \int f + \varepsilon$$

Toto rozdělení je tvořeno rozděleními P' intervalu J' a P'' intervalu J''. Máme

$$\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' \mid B' \in \mathcal{B}(P'), B'' \in \mathcal{B}(P'')\}$$

a každá cihla P se objeví jako právě jedno $B' \times B''$. Potom je

$$F(\mathbf{x}) \le \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathrm{vol}(B'')$$

a tedy

$$\begin{aligned}
S(F, P') &\le \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \max_{\mathbf{x} \in B'} \left(\sum_{B'' \in \mathcal{B}} (P'') \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathrm{vol}(B'') \right) \cdot \mathrm{vol}(B') \le \\
&\le \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B' \times B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathrm{vol}(B'') \cdot \mathrm{vol}(B') \le \\
&\le \sum_{B' \times B'' \in \mathcal{B}(P)} \max_{\mathbf{z} \in B' \times B''} f(\mathbf{z}) \cdot \mathrm{vol}(B' \times B'') = \\
&= S(f, P)
\end{aligned}$$

a podobně

$$s(f, P) \le s(F, P')$$

Máme tedy

$$\int_J f - \varepsilon \le s(F, P') \le \int_{J'} F \le S(F, P) \le \int_J f + \varepsilon$$

a $\int_{J'} F$ je roven $\int_J f$. □

9.5 Lebesgueův integrál

Riemannův integrál je intuitivně velmi uspokojivý a počítá to, co chceme, pokud tedy funguje. Jeho užití má ale několik problémů:

- Nemusí existovat i pro některé přirozeně definované funkce, nebo přinejmenším není snadno vidět, zda existuje.
- Nemůžeme provádět užitečné operace (limity, derivování) dost univerzálně.

Definice (Lebesgueův integrál) je rozšíření Riemannova integrálu, kde můžeme dělat prakticky cokoliv, za snadno zapamatelných podmínek:

1. Je-li J interval a Riemannův integrál $\int_J f$ existuje, shoduje se s Lebesgueovým.

2. Pokud $\int_{D_n} f$ f existuje pro $n = 1, 2, ...$, existuje i
$$\int_{\bigcup D_n} f$$
3. Pokud $\int_D f_n$ existuje a posloupnost $(f_n)_n$ je monotónní, platí $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$
4. Pokud $\int_D f_n$ existuje a $|f_n| \leq g$ pro nějaké g pro které existuje $\int_D g$, platí $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$
5. (Důsledek 4.) Je-li D omezená, $|f_n(x)| \leq C$ a $\int_D f_n$ existují, platí $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$
6. Buď U okolí bodu t_0 a g takové, že existují $\int_D g$ a $\int_D f(t,x)\,dx$ a $\forall t \in U \setminus \{t_0\} : |f(t,x)| \leq g(x)$, potom
$$\int_D f(t_0, x)\,dx = \lim_{t \to t_0} \int_D f(t,x)\,dx$$
7. Jestliže pro integrovatelnou g platí
$$\left| \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \right| \leq g(x)$$
a v nějakém okolí U bodu t_0 všechno dává smysl(?), potom platí
$$\int_D \frac{\partial f(t_0, -)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_D f(t_0, -)$$

9.6 Tietzeova věta

Věta (Tietzeova věta)**:** *Buď Y uzavřený podprostor metrického prostoru X. Potom můžeme každou spojitou reálnou funkci f na Y takovou, že $\forall x \in Y : a \leq f(x) \leq b$ rozšířit na stejně omezenou spojitou funkci g na X.*

The End